第四章 中国古代数学泰斗---刘徽及其成就

§4.1 刘徽简介

一、刘徽生平及成就

刘徽，三国时代魏国人，是中国古代最伟大的数学家之一。据考证，他是山东邹平人，生卒年不详。刘徽出身平民，终生未仕，被称为“布衣”数学家。刘徽在童年时代学习数学时，是以《九章算术》为主要读本的，成年后又对该书深入研究，于公元263年左右写成《九章算术注》。刘徽自序说：

徽幼习《九章算术》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源。探颐之暇，遂悟其意，是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。

刘徽在研究《九章算术》的基础上，对书中的重要结论给予证明，对其错误予以纠正，对其方法作了改进，并提出一些卓越的新理论、新思想。《九章算术注》是刘徽留给后世的十分珍贵的数学遗产，是中国传统数学理论研究的奠基之作。刘徽还著有《重差》一卷，专讲测量问题。他本来把《重差》作为《九章算术注》的第十卷，唐代初年改为单行本，并将书名改作《海岛算经》，流传至今。刘徽对数学进行了全面系统地整理，其理论研究相当深入，堪称中国数学史上的一代楷模。

刘徽不仅是中国古代最伟大的数学家和我国古典数学理论的奠基者之一，也被誉为“古代世界数学泰斗”。刘徽的主要贡献和数学思想在世界数学史上也占有重要地位。吴文俊先生说：“从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里德、阿基米德等相提并论。”他的主要贡献表现在：

（1）刘徽发展了《九章算术》中“率”的概念，指出率是算法之“纲纪”，并将率应用于面积、体积、解勾股形、盈不足、方程等问题，从而建立了一整套代数中相应的算法，这是中国传统数学特有的理论。

(2)刘徽正确地提出了正负数的概念及其加减运算的法则；改进了线性方程组的解法，为中国传统数学和构造性与机械化的发展做出了杰出贡献.

（3）刘徽发展了出入相补原理，并解决了若干多边形面积和多面体体积问题。他证明了勾股、测望的若干公式，并发展了重差方法，解决了若干可望而不可及的复杂测望问题；

（4）刘徽提出了"割圆术"，引入了无穷小分割和极限的思想，在中国首次提出了计算圆周率近似值的科学方法，求出了 $\pi=\dfrac{157}{50}$，相当于 π=3.14 的结果。

（5）在证明圆面积公式和锥体体积公式时，刘徽把四面体体积看成是解多面体体积问题的核心，他将多面体体积理论建立在无穷小分割基础上的思想，与现代数学的思想相契合。

（6）刘徽提出了截面积原理，以此证明了各种圆体的体积公式，并批评了《九章算术》中所使用的球体积公式的错误，他设计了牟合方盖，正确解决球体积开辟了道路；

（7）对于开方不尽的情形，刘徽创立了求微数的方法，开十进小数之先河，并用十进小数来表示无理数的立方根。

（8）刘徽是我国最早明确主张运用逻辑推理的方式来论证数学命题的人。他远接墨家的思想，提出了若干数学概念的含义，克服了以往纯粹靠约定俗成的局面。他提出了若干推理，既有归纳推理，也使用演绎推理，通过“析理以辞、解体用图”，给概念以定义，给判断和命题以逻辑证明，并建立了数学知识之间的有机联系。

二、刘徽的数学学习的理论

魏晋大数学家刘徽在作《九章算术注》，为我国数学作出全面贡献的同时，也深刻阐述了数学学习的理论和思想方法。他的思想方法既反映出中国传统思想文化的特点以及中国传统学习论的特点，又凝结了作为一个伟大数学家的智慧。《九章算术注》序中说“徽幼习九章，长再详览”。“探赜之暇，遂悟其意。”刘徽正是以探赜、索隐、钩深、致远等这些学习方法探索《九章算术》中尚未解决、或解决不彻底的数学问题，寻求解法的形成过程，并探索其中的原理、方法和深邃的数学思想。刘徽注中的对率的理论、出入相补原理的贡献，他的割圆术、对圆周率的推算和鳖臑体积公式的推导等等都是他善于总结科学研究方法，灵活运用数学思想和原理的结果。刘徽论述的具体数学学习原则和方法有：

告往知来，举一反三——“告往知来”、“举一反三”是孔子倡导的一条重要学习原则，后来发展成为先秦诸子共有的逻辑方法和教育方法。“告往知来”语出《论语·学而》：“子曰：“赐也，始可与言《诗》已矣，告诸往而知来者。”“举一反三”语出《论语·述而》：“子曰：“不愤不启，不悱不发，举一隅不以三隅反，则不复也。”刘徽深受这些思想的影响，并将这些思想用于数学的研究和学习，例如，他在“今有术”中有名言：“凡九数以为篇名，可以广施诸率。所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。”

出入相补，各从其类——《易·系辞上》：“方以类聚，物以群分”。又《易·乾》：“各从其类也。”刘徽继承和发展了这种归类学习的方法，深刻阐述了分类方法在数学研究上和学习中的重要性。他首先在《九章算术注》序中有：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。”这是刘徽对归类的学习思想方法的一个总的感悟和深刻认识的总结。在勾股章中有“令出入相补，各从其类。”通过事类相推，刘徽把数学知识整理成一个“约而能周、通而不黩”的完整体系。

析理以辞，解题用图——刘徽主张将数学的逻辑性和直观性结合起来，他一方面继承《庄子·天下篇》“析万物之理”并吸收魏晋时代辩难之风的思想内核，提出数学上的“析理以辞”。他追求概念的明晰、推理的正确和证明的严谨。

异辞，同归——在论及数学解法多样性时，刘徽从数学学科的特点出发，主张将多种方法进行合理的归纳整理，体现出数学解题方法和数学表述的统一性，这是一条解决数学问题的重要学习原则，也是进行数学发现的基础。刘徽注中多次提出将数学方法合理归纳整理的学习方法。

触类而长，靡所不入——《九章算术注》序中所说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。”刘徽注加深、扩大《九章算术》的原有知识，与《易·系辞上》：“引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣”息息相关。

易简用之，动庖丁之理——刘徽特别注重数学研究和学习中的“易简”法则。刘徽注曾引用《庄子·养生主》：“庖丁解牛，游刃理间，故能历久，其刃如新。”并论说：“夫数犹刃也，易简用之，则动庖丁之理。”刘徽注不墨守成规，而是灵活运用各种法则，掌握要害，切中关键，化难为易。这些都是学习数学的重要方法。

敢不缺疑，以俟能言——这里说的是刘徽的学习态度和严谨治学的态度。《论语·为政》：“知之为知之，不知为不知，是知也，……多闻缺疑，慎言其余。”刘徽在数学研究中继承了这种良好的学风和严谨的治学态度。例如，他在推导球体积公式的过程中，对于自己所不能达到的结果，坦言道：“敢不缺疑，以俟能言者。” （“少广”章，第 24 问）。充分体现他实事求是的学风和鼓励后学的高尚品格。

§4.2　刘徽的数学机械化思想

刘徽的《九章算术》注继承了《九章算术》中的思想和方法，对其中的各种机械化算法和公式进行了总结分析和不断改进，并有许多创造，对提高数学机械化的程度和水平做出了重大贡献。他对开方程序进行了改进并创造了解线性方程组的互乘相消法和方程新术，在算法理论方面，刘徽建立了从一般比例算法到“方程”的一系列筹式运算的统一理论，他以率的基本运算为“纲纪”，把《九章算术》中的衰分、均输、盈不足和“方程”诸术都以率概念贯穿下来，于是实现了筹式运算的模式化与程序化，从而奠定了筹算的机械化的理论基础。刘徽的程序化思想，简约而又能全面，各方面内容相通而又不显繁琐，从而把中国古代数学机械化建立在一个更高的层次和水平上。

刘徽的力作《九章算术》注，反映了他在算术、代数、几何等方面的杰出贡献．

1．算术

(1) 十进分数

刘徽之前，计算中遇到奇零小数时，就用带分数表示，或者四舍五入．刘徽首创十进分数，用以表示无理根的近似值．这种记数法与现

十进小数的本质一样。设N为非完全平方数，a为$\sqrt{N}$的整数部分。刘

代 徽认为可以继续开方来求得$\sqrt{N}$的任意精度的近似值。a是有名数的，

刘徽用忽来表示，但 a 后各位就不必再命名了，刘徽称它们为“微数”，说：“微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母．退之弥下，其分弥细．”这种方法，与我们现在开平方求无理根的十进小数近似值的方法一致，即

$$\sqrt{N} = a\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10_2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

其中 a1，a2，…，an 是 0 至 9 之间的一位整数．

(2) 齐同术

《九章算术》中虽有分数通分的方法，但没有形成完整理论，刘徽提出齐同术，使这一理论趋于完善．他说：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同．”又进一步提出通分后数值不变的理论依据，即“一乘一除，适足相消，故所分犹存“法实俱长，意亦等也”．前句话的意思是，一个分数用同一个(非零)数一乘一除，其值不变；后句话的意思是，分数的分子、分母扩大同一倍数，分数值不变．刘徽指出，“同”即一组分数的公分母，“齐”是由“同”而来的，是为了使每个分数值不变．另外，刘徽还将齐同术引而伸之，用来解释方程及盈不足问题．

2．代数

(1)对线性方程组解法的改进

《九章算术》中用直除法解线性方程组，比较麻烦．刘徽在方程章的注释中，对直除法加以改进，创立了互乘相消法．

(2)正负数的运算法则

我国对正负数的应用较早，可是究竟应当怎样认识正负数，却很少有人论及。如在《九章算术》中方程章已用到正负术。在解“方程”进行消元过程中，要进行两行间的对减相消，不可避免地会出现“以大减小”不够减的情形，要保证这种机械化的算法畅通无阻，就必须引进负数和建立正负数的运算法则。因此，正负术的引入是“方程”算法机械化的结果

如该章的第 8 题是：

今有卖牛二、羊五，以买一十三豕，有余钱一千；卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足；卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百。问牛、羊、豕价各几何？

答曰：牛价一千二百，羊价五百，豕价三百。

其解法为：

术曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三负，余钱数正；次，牛三正，羊九负，豕三正；次，牛五负，羊六正，豕八正，不足钱负。以正负术入之。

这里所说的意思就是：若每头牛、羊、豕的价格分别用 x、y、z 表示，则可列出如下的方程（组）：

$$\begin{cases}2x+5y-13z=1000,\\3x-9y+3z=0,\\-5x+6y+8z=-600.\end{cases}$$

然后利用正负数去计算结果。在这里方程的各项系数及常数项中都出现了负数，而且在世界上率先把负数运用于计算之中。

刘徽在《九章算术》注中第一次深刻阐述了自己的观点。刘徽为《九章算术》本题术文“正负术”作注时说：

“今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑，否则以邪正为异”。

正负是什么意思呢？刘徽注文中说：“今两算得失相反，要令正负以名之.”“算”当时是指算筹，如果计算时用算筹代表“得”、“失”两种量，那就要用正负数来定义．这个看法是很正确的，用筹进行代数运算时如何区别正负数，以前不见记载．刘徽提出：“正算赤，负算黑，否则以邪正为异．”这就是说刘徽用红、黑两种颜色的算筹区别正负，否则当用一种颜色的算筹时可以在摆法上以“正”、“邪”(斜)区别正负数．这两种方法，对后来的数学都有深远的影响．刘徽还认为：“言负者未必负于少，言正者未必正于多”前一句话是指负数的绝对值未必小，后一句话是指正数的绝对值也不定很大，因此这两句话说的是关于正负数的绝对值．

刘徽不仅在工具上规定了正负数的区别，而且还规定了正负数的运算法则：

同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。

异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之

前四句是指正负数的减法法则，用现代记号就是：当 $a\geqslant b>0$ 时，

$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$ (同名相除)，

$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$（异名相益)，。

$0-(\pm a)=\mp a$ (正无入负之，负无入正之)

“无入”，刘徽注释为“为无对也，无所得减也......”，可见“无入”就是“没有与之对减的数，即是零。

后四句讲的是正负数的加法法则：

（1）如果两数异号，则其和的绝对值是其绝对值之差，其符号由绝对值较大的数的符号决定：

$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$，这里 $a\geqslant b>0$，

$(\pm a)+(\mp b)=\mp(b-a)$，这里 $b\geqslant a>0$。

（2）如果两数同号，则其和的绝对值是两数绝对值之和：

$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$

正数没有与之相加的数，仍得正数，负数没有与之相加的数，仍得负数：

$0+(\pm a)=\pm a \quad a>0$。

关于正负数的乘除法则，在《九章算术》时代或许会遇到有关正负数的乘除运算，可惜书中并未论及，直到元代朱世杰在《算学启蒙》(1299)中才有明确的记载：“同名相乘为正，异名相乘为负”，“同名相除所得为正，异名相除所得为负”，因此最迟于 13 世纪末，我国对有理数四则运算法则已经全面作了总结。总之，从正负数概念的引入，到正负数加减运算法则的形成的历史记录，我国都是遥遥领先.

在国外，有很长时期认为负数是一种“荒谬的数”，被摒弃于数的大家庭之外。首先承认负数的是 7 世纪印度数学家婆罗摩笈多(Brahmagupta，约 598 年出生)，比《九章算术》晚了约 800 年。欧洲最先认识到负数的是 1 3 世纪意大利的数学家斐波那契(Fibonacci，约 1170 一约 1250)，则更比印度也晚得多，甚至直到 19 世纪仍有个别数学家认为负数是无法理解的。

数学家阿尔·花拉子米（al-Khwārizmī，783～850）的《代数学》是代数学产生的标志。花拉子米的代数学名著阿拉伯文手稿《Al-jabr w'al muqabala》，Al- jabr 原意是“还原”，实指把负项移到方程另一端变成正项，保持方程平衡。“muqabala”意即“化简”或“对消”即把方程两端相同的项消去或合并同类项，花拉子米提出的“还原”与“对消”两种变换，正是通过从 ax^2+bx+c 这种形式的式子里减去或加上一些项，“他解出了一次和二次方程，但保留六种不同的形式如 $ax^2=bx$，$ax^2=c$，$ax^2+c=bx$，$ax^2+bx=c$ 以及 $ax^2=bx+c$，而让 a，b，c 总是正数，这就避免了单独出现负数以及减数可能大于被减数的情形”。其实，在未引入负数的早期代数学里，大抵就是这样求解方程的。

§4.3 刘徽的“割圆术”---无穷小分割和极限方法

刘徽首创“割圆术”， 证明了圆面积的精确公式，在此基础上开创了求圆周率的科学方法，是无穷小分割和极限方法的完美结合，从而建立了通向微积分的门槛。

一、证明圆面积公式

刘徽从圆内接正 6 边形开始割圆，得到正 12 边形，以圆内接正 6 边形每边长乘半径再 3 倍，可计算出圆内接正 12 边形的面积。再割成正 24 边形并计算出其面积。刘徽说：

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"

即是说，如此继续下去，对于这个正 6×2^n（n=0，1，2，3，…）边形序列，设 S_n 是 6×2^n 边形的面积，L_n 是每边长，割得越细，即 n 越大，$S_圆-S_n$ 就越小，割至不可割时，则圆内接正多边形便与圆周合为一体，这实质上证明了

$$\lim_{n\to\infty} 6\times2^n L_n = L$$

此时， $\lim_{n\to\infty} S_圆-S_n=0$，或 $\lim_{n\to\infty} S_n=S_圆$

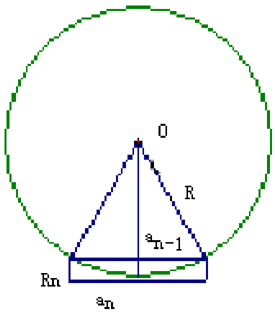


图4-2

接着，刘徽指出，每一次分割中，圆内接正多边形的每边与圆周之间都有一个余径 R_n，如图 4－2 所示，若将所有边长乘以余径 R_n 加到正多边形面积上去，则其和又大于圆面积，即

$$S_n < S_圆 < S_{n-1} +2（S_n - S_{n-1}） \qquad （1）$$

但随着"割之又割"，余径 R_n 越来越小，即 $n\to\infty$ 时，$R_n\to0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}[S_{n-1} +2（S_n - S_{n-1}）]= S_圆$$

从以上割圆的机械化过程，可以看出，圆内接正多边形逐渐逼近圆的变化趋势。因此，刘徽以不可割的极限状态，证明了与圆周合为一体的正多边形的面积就是圆面积 $S_圆$。

最后，刘徽**"觚而裁之"**，即对于与圆周合为一体的正多边形进行无穷小分割，分成无穷多个以正多边形每边为底，以圆心 O 为顶点的小等腰三角形（图 4－3），由于每一小三角形面积（设为 A）等于这一小三角形底边长（设为 l*）乘半径 R 的一半：$A=\frac{1}{2}l^*R$。圆的面积 $S_圆$ 等于这无穷多个小三角形的面积之总和，即

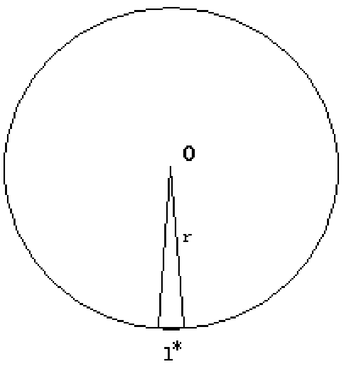


图4－3

$$S_圆=\sum_1^\infty A=\frac{1}{2}\sum_1^\infty l^*R = \frac{1}{2}LR \qquad （2）$$

这样，通过对直线形的无穷小分割，然后求其极限状态的和的方式，就证明了圆面积公式为圆周长与半径乘积的一半。即 $S_圆=\frac{1}{2}LR$。刘徽指出，本公式中的周、径**"谓至然之数，非周三径一之率也。"**因此，刘徽这里的**"至然之数"**，就是圆周率。

二、科学推求圆周率π

刘徽的"割圆术"的意义不仅证明了圆面积的精确公式，而且开创了求圆周率的科学方法。刘徽取直径为 2 尺的圆，因此圆内接正 6 边形边长为 1 尺，按从圆内接正 6 边形开始割

圆程序，得到一个正 6×2^n 边形序列（n=0，1，2，…）。

刘徽“割圆术”求圆周率的正确方法，从中可以发现明显的循环语句和子程序的思想，“割圆术”是一种典型的计算机循环语句。

刘徽的程序是完全同样的计算 12，24，48，96 边形边长（觚面）的程序。它们之间仅有的差别就是赋予“面”以新值，事实上，刘徽将每一次迭代过程结束时所得之值“赋”给下一迭代过程的参变量“面”。这是一个典型的循环语句的例子“Do I=1 to N”[①]。

循环、递推公式：

$$d_{3\times2^n}=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times2^n}}{2}\right)^2}$$

$$R_{3\times2^n}=R-d_{3\times2^n}=R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times2^n}}{2}\right)^2}$$

$$a_{3\times2^{n+1}}=\sqrt{\left(R_{3\times2^n}\right)^2+\left(\frac{a_{3\times2^n}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left[R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_{3\times2^n}}{2}\right)^2}\right]^2+\left(\frac{a_{3\times2^n}}{2}\right)^2}$$

$$S_{3\times2^{n+2}}=3\times2^{n+2}\times\left(a_{3\times2^{n+1}}\times R\right)$$

若按 R=1，从 a_6=1 开始，根据这套公式便可循环递推地依次计算出 n=1，2，3…时相应的 $S_{3\times2^{n+2}}$ 值来。这样，可以通过计算正多边形面积来推求圆周率的算法，具有强烈的机械化的特点，可以设计成程序框图表示（图 4－4）。

每一循环程序中的

$a_{3\times2^{n+1}}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times2^n}^2}}$ 所以每次的

$S_{3\times2^{n+2}}=3\times2^n\times\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times2^n}^2}}$

$3\times2^n\times\sqrt{2-\sqrt{4-a_{3\times2^n}^2}}$ 可作为 π 的近似值。从理论上分析，要计算多精确的值，就可以多么精确，只要令倍边次数 k 足够大即可。

按刘徽的术文，他算出 a_{96}（取 A=1，k=4）和 S_{96} ，S_{192}，可求得圆周率 $\pi=\frac{157}{50}$，又依次求出 a_{1536}（取 k＝8），进而求出 S_{3072}，从而验证了对数值进行调整后的更密合的值 $\frac{3927}{1250}$，从而得出 $\pi\approx\frac{3927}{1250}$=3. 1416 这一更精确的数据。按照上述刘徽的割圆程序框图，只要取 n=11 算出 a_{12288} 和 S_{24576}， 就能达到所谓祖冲之 7 位有效数字的圆周率数值。元代的赵友钦在其《革象新书》中则从圆内接正方形开始起算，运用与刘徽相类似的方法算出 a_{16384}，从而验证了祖氏密率 π 的精确性。

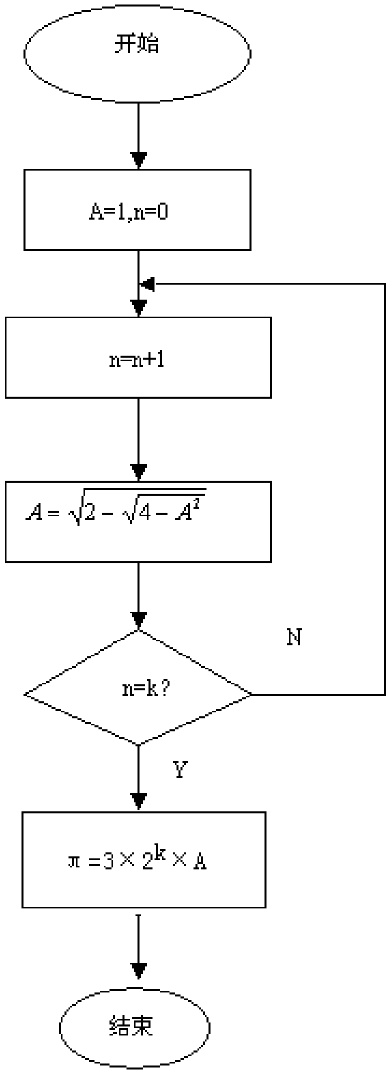


图 4－4

§4. 4　刘徽的出入相补原理

一、刘徽运用出入相补原理对平面图形面积的证明

“出入相补，各从其类”是我国古代构造性证明的最突出体现。出入相补原理虽然在我国最重要的数学经典《九章算术》中没有明确提出，但这种方法被数学家们广泛应用于各种具体的直线形的平面图形面积、多面体的体积公式的证明，以及曲边形如圆、圆环等面积公式近似的证明。刘徽在《九章算术注》中针对“勾股术”曾作了如下解释（如图 4－6）：“勾股自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂，开方除之，即弦也”。这就是出入相补原理的由来。出入相补原理成为中国古代处理面积和体积问题的一个重要而基本的传统经典方法。

当代著名数学家吴文俊院士对中国数学的这一重要方法十分重视，为此著《出入相补原理》一文专门论述，并作总结指出，所谓出入相补原理，用现代语言来说，就是指这样的明显事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

例 1：刘徽对勾股定理的证明。

在证明勾股定理时也是用以形证数的方法，刘徽用了“出入相补法”即对图形进行割补，分别将Ⅰ→Ⅰ’，Ⅱ→Ⅱ’，Ⅲ→Ⅲ’，这样就将以勾和股为边的正方形移到以弦为边的正方形的区域内，移动前后图形的面积是一样的，这样完全用图解法就解决了问题。（图 4－7 为刘徽的勾股证明图）。

中国古代数学家们对于勾股定理的发现和证明，在世界数学史上具有独特的贡献和地位。尤其是其中体现出来的“形数统一”的思想方法，更具有科学创新的重大意义。

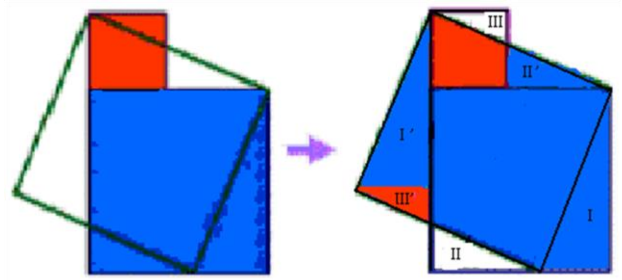


图 4－7

例 2：测海岛的高

刘徽在前人工作的基础上，对重差术继续进行研究，举了 9 个例题，编写成“重差”章，附在《九章算术》“勾股”章的后面．因为它的第 1 题是一个测量海岛的问题，于是这个重差章的单行本，在唐朝以后就称为《海岛算经》.

图 4－6

《海岛算经》第 1 题为：

今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合．从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合．问岛高及去表各几何．

答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步．

术曰：以表高乘表间为实．相多为法，除之．所得加表高，即得岛高．求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实．相多为法。除之，得岛去表数．

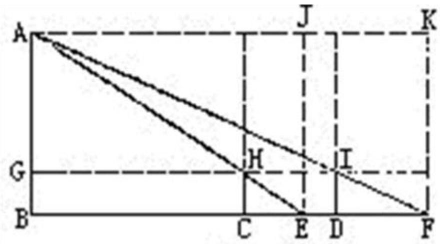


图4－8

由于刘徽自注已佚，他怎样证明这些结果，学界未有定论．根据刘徽的数学水平，以率的原理和以出入相补原理来证明都是可信的，很可能同时采用这两种，下面以立两表测海岛为例说明怎样以出入相补原理证明。

（如图 4－8），本题已知两表（即标杆）CH和DI, $CH = DI = 3$丈 。

“表间”即两标杆之间的距离$CD = 1000$步.$CE = 123$步, $DF = 127$步

要求岛高AB和岛离杆的距离BC之长。古代1步＝六尺，故杆高五尺。

由刘徽术文，得：

$$岛高AB = \frac{表间\times表高}{相多} + 表高 = \frac{CD\times CH}{DF-CE} + CH = \frac{1000\times 5}{127-123} = 1255(步)$$

$$去岛（岛离前杆的距离）BC = \frac{表间\times前表却行}{相多} = \frac{CD\times CE}{DF-CE} = \frac{1000}{127-123} = 30750(步)$$

吴文俊先生认为证明方法如下：

由于▭IK=▭IB， ▭HJ=▭HB，

相减得

▭IK－▭HJ=▭IC，

由此可得：

后表却行×(岛高－表高)－前表却行×(岛高－表高) =表间×表高，

$$岛高=\frac{表间\times表高}{后表却行-前表却行} \quad +表高=\frac{表间\times表高}{相多}+表高$$

又从▭HJ=▭HB 得

前表却行×(岛高－表高) =前表去岛×表高，

代入岛高公式，即得“前表去岛”公式：$去岛 = \dfrac{表间\times前表却行}{相多}$

因公式中用到两表与岛的距离差，又用到后表却行与前表却行的距离差，因此，这种测量方法叫“重差术”。本题是二次测望问题，其他问题都是三次或四次测望问题，较复杂，但原理与本题相同。刘徽曾著《重差图》和《重差注》，可能是用来推导术文的，已佚。

例 3 **勾股容方**

勾股容方是古代中国数学中的一个命题。出自《九章算术》第九卷《勾股》章第十五题。经三国时数学家刘徽论证，其后又经中国历代数学家研究和扩充为股中容直，勾中容横，由此产生一套具有中国传统数学特色的求解直角三角形几何学问题的方法，广泛用于在中国古代几何学和测量学。中国古代没有古希腊欧几里得几何学的平行线概念，采用容方、容横、容直概念，收到异曲同工的效用。

刘徽为勾股容方的关系式，提供了两个证明，一个是利用出入相补原理，即利用几何图形在移动、转动时面积守恒，将几何图形重新排列，以求结果的方法。先将三角形 ABC 复制，倒置，和原三角形合并成为一个高为 H、宽为 L 的长方形，如图。将两个边长为 X 的正方形标以黄色，两个大直角三角形标以红色，两个小直角三角形标以青色[1]。再将左图的两个黄色正方形、两个红色大直角三角形、两个青色小直角三角形，重新排列如右

图。从出入相补，面积守恒原理，左图的面积和右图的面积相等。左图面积=HL， 右图面积=X(H+L)[2]

HL = X(H+L)

由此得出勾股容方的关系式：

边长 X = HL / (H+L)

刘徽的第二个证明，利用相似三角形比率不变原理。刘徽注曰：“幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，其相与之势，不失本率也”。 即内接正方形 DEFB 的两边 DE,EF 与直角三角形的三边，各自形成小的直角三角形，而这两个小直角三角形三边的比率，和原来大直角三角形的三边比率相同。刘徽从勾中容方中归纳出“不失本率”原理，即三个相似三角形比率相同。

AD : DE : AE = EF : FC : EC = AB : BC : AC

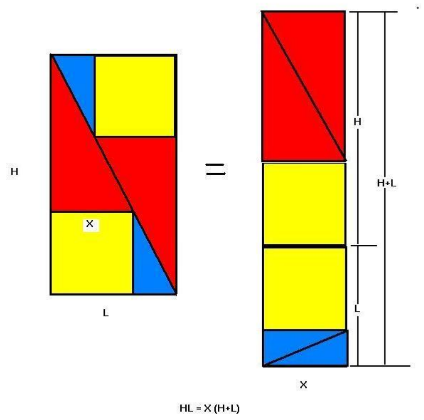
令股高为 H，勾长为 L，勾股容方的边长为 X，根据不失本率原理，

(H-X) : X = H : L

HL - XL = HX

HX + XL = HL

得勾股容方关系式　　　X＝ＨＬ／（Ｈ＋Ｌ）。



例 4 “勾股容圆”

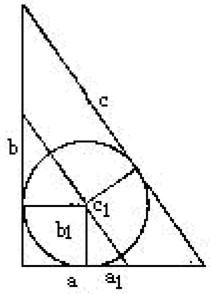


图4－9

《九章算术》有“勾股容圆”问：已知勾 a、股 b。求勾中容圆径 d。

其公式是：$d=\frac{2ab}{(a+b+c)}$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$ 。刘徽用衰分术证明了这个公式.

刘徽过圆心作平行于弦的直线，称为中弦，分别与垂直于勾、股的半径及勾、股形成与原勾股形相似的小勾股形，且其周长分别等于勾、股．（图 4－9）设勾上小勾股形边长为 a_1，b_1，c_1，则 a_1：b_1 ∶ c_1＝a ∶ b ∶ c，且 $a_1+b_1+c_1=a$。由“衰分术”

$b_1=\dfrac{ab}{(a+b+c)}$，$d=2b_1=\dfrac{2ab}{(a+b+c)}$。同样，由股上小勾股形亦可求出此公式．

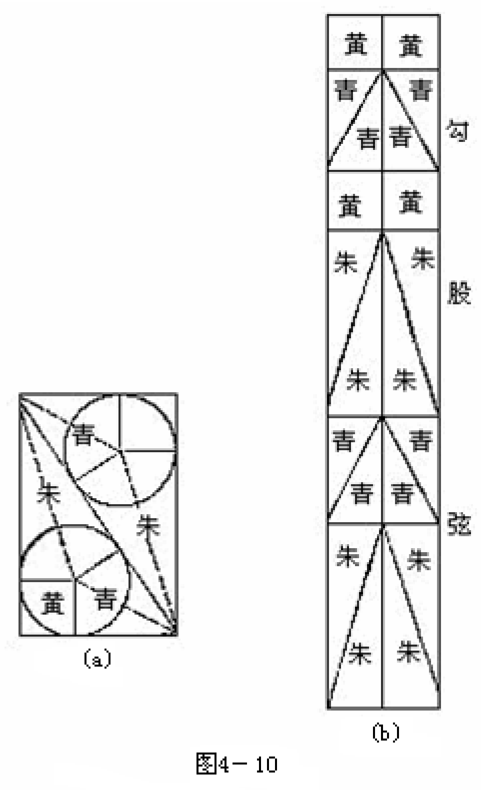


图4－10

对于勾股容圆，刘徽注的出入相补方法是：

“勾股相乘为图本体，朱、青、黄幂各二，倍之则为各四．可用画于小纸，分裁邪正之会，令颠倒相补，各以类合成修幂：圆径为广，并勾、股、弦为袤．故并勾、股、弦以为法”.

如图 4－10(a)这是将勾股形由圆垂直于勾、股、弦的半径分成朱、青、黄三块，将两个勾股形合成一个长方形(其面积为 ab)，则有朱、青、黄各两块．再加倍，则各四块．将朱、青各中分，则此四朱、青、黄拼成以圆径为宽，勾、股、弦之和为长的长方形，其面积为 2ab，显然 $d=\dfrac{2ab}{(a+b+c)}$，如图 4－10(b)。

二、“刘徽原理”

刘徽在注释中把对于平面图形的出入相补原理推广应用到空间图形，成为“损广补狭”以证明几何体体积公式．

刘徽用无穷小分割和极限方法证明了一条极为重要的原理：

邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。

即由一个堵分成的阳马和鳖臑，其体积之比为 2：1，吴文俊称之为“刘徽原理”。

刘徽还用棋验法来推导比较复杂的几何体体积计算公式．刘徽说：“验之以棋，其形露矣。”“棋”是指某些几何体模型。所谓棋验法，即用几何体模型验证的方法，例如长方体本身就是“棋”[图 4－13(a)]斜解一个长方体，得两个“堑堵”[图 4－13(b)]。

$$V_{堑堵}=\frac{1}{2}abh。$$

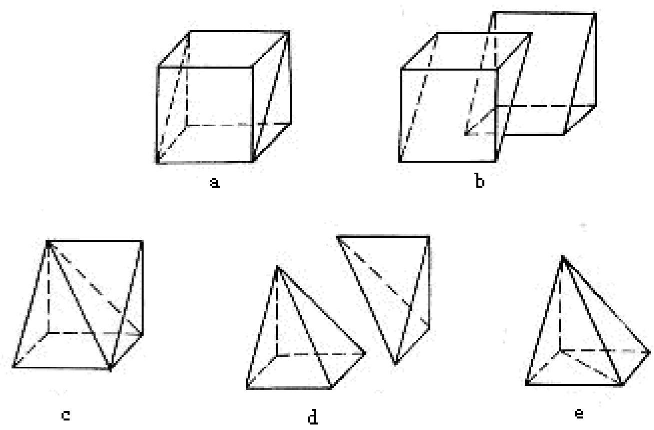


图4－13

再解开右后边的堑堵[图 4－13(c)]．得 1 个底面为长方形而有一棱和底面垂直的四棱锥(古代称之为“阳马”)和 1 个底面为直角三角形而有一棱和底面垂直的三棱锥(古代称之为“鳖臑”[图 4－13 (d)]这个阳马又可以对分为两个“鳖臑”[图 4－13(e)]，如果原长方体为正方体的话，则极容易看出：由一个堑堵分解出来的三个鳖臑是等积的。刘徽证明在长方体的情况下，由一个堑堵分解出来的三个鳖臑仍然是等积的。于是

$$V_{阳}=\frac{1}{3}abh,V_{鳖}=\frac{1}{6}abh$$

所以：$V_{阳}:V_{鳖}=2:1$